Meetkunde en ervaringsstructuur.

Rede, uitgesproken op den gedenkdag van de Technische Hoogeschool op 9 Januari 1939, door den Rector Magnificus, Prof. dr. ir. J. A. Schouten.

Edelgrootachtbare Heeren Curatoren onzer Technische Hoogeschool, Mijne Heeren Professoren en Lectoren, Dames en Heeren Privaatdocenten en Assistenten, Dames en Heeren Studenten, en voorts Gij allen, die door Uwe tegenwoordigheid de beteekenis van dezen feestdag verhoogt,

Zeer gewaardeerde Toehoorderessen en Toehoorders,

Gebruik makende van het voorrecht, dat den Rector Magnificus is gegeven, om op dezen dag een onderwerp te behandelen uit zijn eigen veld van onderzoek, wil ik tot U spreken over het verband tusschen meetkunde en ervaring. Aanwezige mathematici en physici wil ik van te voren mijn excuus aanbieden voor den weinig exacten causerievorm, dien ik wel gedwongen was aan het geheel te geven en voor het voor hen minder interessante, daar voor het meerendeel overbekende, eerste gedeelte; andere belangstellenden daarentegen voor een wat meer op details ingaand, en daardoor minder algemeen begrijpelijk, gelukkig voor hen echter ook zooveel korter, later gedeelte. Het gewenschte „elk wat wils" in een voordracht als deze moet noodzakelijk als zijn tegendeel met zich brengen, dat een ieder ook wel dingen te hooren krijgt, die hem niet kunnen boeien.

Het is een oude vraag of de wiskunde een wetenschap a priori of a posteriori is. Nader gepreciseerd luidt die vraag: gaat de menschelijke geest uit van eenige van te voren en buiten alle ervaring om aanwezige grondbegrippen om daaruit, wederom buiten alle ervaring om, het systeem der wiskunde op te bouwen, of speelt bij den opbouw der wiskunde ook de ervaring ergens een rol? In het eerste geval zou de op zichzelf merkwaardige omstandigheid, dat de wiskunde in ieder stadium van haren opbouw op de een of andere wijze op de ervaring van toepassing blijkt te zijn, voor den theoretischen wiskundige als zoodanig eigenlijk geen beteekenis hebben; voor hem zou de wiskunde ook buiten ieder ervaringsverband leven en zich ontwikkelen. Nu is het inderdaad een feit, dat, gegeven enkele grondbegrippen, bijvoorbeeld „geheel getal" „continuïteit" e.d., de geheele wiskunde, buiten de ervaring om, **kan** worden ontwikkeld. Het zou er dus nog slechts op aankomen om te bewijzen, dat ook die grondbegrippen, die ik met opzet hier niet nauwkeurig preciseerde, buiten iedere ervaring om in den menschelijken geest aanwezig zijn, om de juistheid van de aprioristische opvatting te verzekeren. Een dergelijk bewijs is echter tot heden noch in positieven noch in negatieven zin geleverd, en het is zelfs niet uitgesloten, dat de geheele vraag op zichzelf zinledig is en behoort tot die zoogenaamde schijnproblemen, die vanzelf verdwijnen zoodra zij behoorlijk worden geformuleerd.

Stellen wij de vraag dus liever eens volkomen anders, vragen wij niet wat **kan** de wiskundige doen, in het bezit van zijn door teekens en regels gesymboliseerde grondbegrippen, maar wat **doet** hij **in feite**? Hoe ontwikkelt zich de wiskunde nu **werkelijk**, geschiedt die ontwikkeling zuiver buiten de ervaring om, of grijpt de ervaring hetzij bij voortduring, hetzij incidenteel in het ontwikkelingsproces in? Wij vragen dus niet meer wat er **zou kunnen** gebeuren, maar wat er **werkelijk** gebeurt, d.w.z. wat zich aan de hand der geschiedenis laat vaststellen. Deze vraag, die in elk geval **geen** schijnprobleem is, daar naar principieel vaststelbare feiten gevraagd wordt, wil ik trachten te beantwoorden voor dat deel der wiskunde, dat men gewend is „meetkunde" te noemen. De vraag, wat dan eigenlijk precies onder „meetkunde" te verstaan is, zal daarbij vanzelf aan de orde komen, daar de verschillende fasen harer geschiedenis zich juist scherp onderscheiden door het antwoord, dat in ieder dier fasen op deze vraag werd gegeven.

Vooraf een opmerking van meer algemeene strekking. Bij de ontwikkeling van een ervaringswetenschap kan er onder omstandigheden een oogenblik optreden, waarop het complex der ervaringen, dat in den aanvang nog verward en onsamenhangend scheen, een min of meer duidelijke **structuur** gaat vertoonen. Veelal gelukt het dan van die structuur een **structuurschema** te ontwerpen, d.i. een stelsel van symbolen en van regels aangaande het gebruik en de combinatie dier symbolen. Ware zulk een structuurschema volledig, dan zou het ieder ervaringsfeit afbeelden en zou het dus mogelijk zijn ten aanzien van den uitslag van ieder experiment in het beschouwde ervaringscomplex voorspellingen te doen. Een ervaringscomplex met een volledig structuurschema heet **volledig gemathematiseerd,** het structuurschema heet de **wiskunde** van het complex en de bewerkingen, die wij de symbolen in het schema laten ondergaan om tot voorspellingen, althans van de mate van waarschijnlijkheid van een gebeurtenis, te komen, heeten **berekeningen,** alle deze uitdrukkingen opgevat in den ruimsten zin van het woord. Ik noem eenige voorbeelden. De dagelijksche ervaring van het samenvoegen en scheiden van voorwerpen heeft tot structuurschema de gewone rekenkunde met hare symbolen, de getallen, en hare aan vaste regels onderworpen bewerkingen, optellen, aftrekken, enz. Dit ervaringscomplex is volledig gemathematiseerd, niemand zal er over denken nog eens experimenteel te toetsen of nu werkelijk 132 gulden plus 346 gulden wel precies 478 gulden is. De gewone dagelijksche ruimtelijke ervaring, die wij hebben van de voorwerpen in de ruimte rondom ons, heeft tot structuurschema de zoogenaamde „gewone" meetkunde of meetkunde van Euclides, die, zooals wij thans weten, werkelijk een binnen de door de waarnemingsfouten gestelde grenzen volledige mathematiseering geeft, zoolang er geen sterk gravitatieveld optreedt, de afmetingen groot (t.o. van een atoom) en de snelheden klein (t.o. van het licht) zijn. De ervaring, die wij hebben van electrische en magnetische verschijnselen, is ten deele gemathematiseerd in een structuurschema, dat zich groepeert om de wetten van Maxwell, maar het is bijvoorbeeld niet mogelijk den specifieken electrischen weerstand van een metaal uit dit schema te berekenen. Onze ervaring ten aanzien van de spectraallijnen vindt voor een deel haar structuurschema in de quantenmechanica, maar is nog evenmin volledig gemathematiseerd. Er is een natuurlijke neiging om al deze verschillende structuurschemata met elkaar in verband te brengen en zoo mogelijk tot één enkel schema te vereenigen en deze neiging bestaat niet alleen bij de onderzoekers, die naar vereenvoudiging streven, maar zij komt ook als het ware in die schemata zelve tot uiting, doordat telkens weer blijkt, dat men niets blijvend kan isoleeren, dat men bijvoorbeeld geen electrische verschijnselen behoorlijk kan behandelen zonder de magnetische er bij te nemen, geen electromagnetisme zonder gravitatie en geen gravito-electromagnetisme zonder quanten.

Deze unificeering is alleen mogelijk, doordat de schemata een groote mate van soepelheid bezitten, waardoor zij in staat zijn zich te wijzigen en zich aan elkaar aan te passen, niet alleen zonder verlies hunner toepasselijkheid, maar zelfs onder uitbreiding hunner toepaselijkheid tot ervaringsgebieden, waar men van te voren de mogelijkheid eener volledige mathematiseering niet zou hebben durven vermoeden. Van deze soepelheid en beweeglijkheid der schemata wil ik U nu eenige voorbeelden geven.

Gaan wij daartoe terug tot de gewone meetkunde der dagelijksche ruimtelijke ervaring. Over het al of niet a priori zijn dier meetkunde zullen wij niet spreken; historisch staat vast, dat zij zich in elk geval ontwikkelde, wellicht niet uit, maar dan toch naar aanleiding van het practische meten, in het bijzonder van het landmeten. Maar daarna, eenmaal door Euclides volledig geaxiomatiseerd, werd zij tot een veld van onderzoek, los van iedere ervaring. In de eerste eeuwen bestond dat onderzoek alleen uit het opsporen van nieuwe stellingen en het bewijzen van deze op grond van de axioma's. Eerst in de eerst helft van de negentiende eeuw kwam men na heel veel strubbelingen tot een nieuw denkbeeld. Het bleek namelijk, dat men uit een axiomastelsel een ander axiomastelsel kon verkrijgen door eenvoudig één der axioma's te wijzigen, met dien verstande natuurlijk, dat dan het nieuwe stelsel even consistent (d.w.z. niet tot tegenstrijdigheid voerende) moest zijn als het oude. Overigens bleef de keuze van het nieuwe axioma geheel vrij. Aan zulk een axiomawijziging hebben de niet-euclidische meetkunden, aan wier ontdekking de namen van Bolyay, Lobatschevsky en Gauss verbonden zijn, hun ontstaan te danken. Hier betrof het een verandering van het laatste axioma, het zoogenaamde parallellenaxioma, maar men kan natuurlijk ook allerlei andere veranderingen invoeren, wat dan ook later gedaan is, nadat het principe eenmaal gevonden was. Zoo ontstonden bijv. door het afzien van de beperking van het dimensieaantal tot drie de meerdimensionale meetkunden, door het afzien van de maatverhoudingen de projectieve meetkunde, door het uitsluitend vasthouden van de maat in het kleine de meetkunde van Riemann en door het opgeven van het oneindige aantal punten, lijnen en vlakken de zoogenaamde „eindige" meetkunden als bijv. een der meetkunden van Veblen, die maar 21 punten en 21 lijnen bevat en niet meer, en toch aan alle axioma's van snijden en bepalen voldoet. Van een niet-euclidische meetkunde is de tweedimensionale meetkunde op het oppervlak van een bol een voorbeeld, de rechtste lijnen zijn daar groote cirkels, twee van die lijnen snijden elkaar altijd, en in een uit rechtste lijnen opgebouwden driehoek is de som der hoeken grooter dan 180°. Een tweedimensionale Riemannsche meetkunde geldt op ieder willekeurig gebogen oppervlak, bijv. op het oppervlak van een aardappel, ook daar bestaan rechtste lijnen, tusschen twee voldoend naburige punten bestaat één rechtste verbindingslijn, die tegelijk de kortste verbindingslijn is, en de „afstand" van de punten is de lengte van die lijn. Dit alles echter alleen, wanneer men uit de buurt blijft van de zoogenaamde „oogen" van den aardappel, waar de meetkunde haar beteekenis gaat verliezen en die een wat ruw maar wel tot de verbeelding sprekend voorbeeld geven van „singuliere punten", die in een meetkunde kunnen optreden.

Al die meetkunden schenen nu voorloopig zoo maar zonder verband los naast elkaar te bestaan, totdat het Klein in 1872 [1]) gelukte het beginsel aan te geven, waaruit zij allen konden worden afgeleid, waardoor eenerzijds een gezichtspunt tot klassificeering verkregen was en anderzijds voor het eerst een wel gepreciseerd antwoord gegeven kon worden op de vraag wat meetkunde nu eigenlijk is. Men kan het Kleinsche indeelingsbeginsel op de eenvoudigste wijze karakteriseeren door uit te gaan van de eenvoudige opmerking, dat de gewone meetkunde niet **alle** eigenschappen van figuren behandelt, maar alleen die, die **invarant** zijn (d.w.z. blijven bestaan) wanneer men de figuur draait of verschuift. Verdraaiingen en verschuivingen vormen samen wat men noemt een groep van transformaties en wel een zoogenaamde **eindige groep van Lie.** Deze speciale eindige Liesche groep heet de bewegingsgroep. Men kan dus zeggen, dat de gewone meetkunde de theorie der invarianten der bewegingsgroep is. Gaat men nu uit van een andere eindige Liesche groep, dan verkrijgt men een andere meetkunde en het bleek, dat alle omstreeks 1872 bekende meetkunden op deze manier te verkrijgen waren, met uitzondering van de Riemannsche meetkunde. Maar ook daar wist Klein raad te schaffen. [2]) De voor een Riemannsche meetkunde van n afmetingen karakteristieke maatverhoudingen werden vastgelegd door den zoogenaamden fundamentaaltensor, d.i. een **geometrisch object**, dat door een aantal $\frac{n(n+1)}{2}$ getallen, de **kentallen**, wordt vastgelegd. Beschouwt men nu de verandering, die die kentallen ondergaan bij verandering van het coördinatenstelsel, dan blijkt, dat men een Riemansche meetkunde kan opvatten als de theorie van de invarianten van een bij dit geometrische object behoorende **oneindige** Liesche groep. Het had nu wel voor de hand gelegen ook eens andere geometrische objecten ten grondslag te leggen en zoo andere op oneindige Liesche groepen gebaseerde meetkunden te ontwikkelen, maar de geschiedenis is nu eenmaal dien weg niet gegaan en de hier afgebroken draad werd eerst veel later weer opgevat. Wat de meetkunde der eindige groepen betreft, werkte het Kleinsche beginsel, dat orde bracht in de veelheid van meetkunden, echter in hooge mate bevruchtend en gaf het aanstoot tot tal van onderzoekingen zoowel op meetkundig gebied alsook op het gebied der theorie der eindige transformatiegroepen. Het scheen alsof het beslissende woord gesproken was en alsof zich het gebouw van meetkunde, groepentheorie en aanverwante gebieden (als bijv. partieele differentiaalvergelijkingen) zich nu verder rustig geheel onafhankelijk van de ervaring zou kunnen ontwikkelen tot een fraai afgerond geheel, dat de tijden zou trotseeren.

In werkelijkheid gebeurde er betrekkelijk spoedig geheel iets anders. Er kwam een nieuwe inslag van de zijde der ervaringswetenschappen. De speciale relativiteitstheorie van 1905, die tot het inzicht voerde, dat de meetkunde der ruimtetijdwereld de meetkunde van de transformatiegroep van Lorentz was, en die dus volkomen in het Kleinsche schema past, bracht dien nieuwen inslag nog niet en beteekende veeleer een triomf voor de meetkundigen, wier theoretische en schijnbaar van de werkelijkheid afgekeerde onderzoekingen hadden geleid tot zoo bij uitstek practisch bruikbare resultaten *). Einstein's algemeene relativiteitstheorie van 1916 echter, die de meetkunde der Lorentzgroep voor het **kleine** behoudende, voor het **groote** een Riemannsche meetkunde der ruimtetijdwereld proclameerde en op grond van deze meetkunde onmiddellijk de verklaring wist te geven voor een nog onverklaarde onregelmatigheid in de beweging van Mercurius,

---

Ter karakteriseering kan ik het beste de in 1908 door Minkowski te Göttingen uitgesproken woorden aanhalen: [3])

„Überhaupt werden die neuen Ansätze, falls sie tatsächlich die Erscheinungen richtig wiedergeben, fast den grössten Triumpf bedeuten, den je die Anwendung der Mathematik gezeigt hat. Es handelt sich darum, dass die Welt in Raum und Zeit in gewissem Sinne eine vierdimensionale Nichteuklidische Mannigfaltigkeit ist. Es würde zum Ruhme der Mathematiker, zum grenzenlosen Erstaunen der übrigen Menschheit offenbar werden, dass die Mathematiker rein in ihrer Phantasie ein grosses Gebiet geschaffen haben, dem, ohne dass dieses je in der Absicht dieser so idealen Gesellen gelegen hätte, eines Tages die vollendete reale Existenz zukommen sollte."

voerde ook voor den meetkundige tot nieuwe problemen. Wij zagen, dat de Riemannsche meetkunde niet zonder invoering van een geometrisch object en van een oneindige Liesche groep in het gebruikelijk geworden schema paste, en hier werd nu plotseling een vierdimensionale Riemannsche uitgebreidheid gepresenteerd met de pretentie de werkelijke maatverhoudingen in onze ruimtetijdwereld juist weer te geven. Weliswaar had het differentiaalmeetkundig onderzoek van mechanische problemen met meerdere vrijheidsgraden vroeger ook al wel geleid tot het beschouwen van uitgebreidheden met Riemannsche maatverhoudingen, maar die Riemannsche ruimten schenen meer het karakter van mathematische hulpvoorstellingen te dragen, terwijl de maatverhoudingen in de ruimte, die zich nu aan de beschouwing opdrong, met behulp van meetstaven en klokken werkelijk getoetst konden worden. In den geest der geometers van dat tijdsgewricht, die zich in die nieuwe ruimte wilden inleven en dat binnen de grenzen der bestaande structuurschemata niet op bevredigende wijze konden, ontstond een toestand van spanning, die op de een of andere wijze tot een ontlading moest voeren. Die ontlading kwam reeds zeer spoedig en nog voor het einde van den wereldoorlog door de ontdekking van het **pseudoparallelisme.** Dat er in een Riemannsche ruimte geen gewoon parallelisme bestaat, is duidelijk, men denke slechts aan de tweedimensionale Riemannsche meetkunde op het oppervlak van een aardappel. Wat zou immers op zoo'n oppervlak evenwijdigheid kunnen beteekenen? Dat er echter in een zoodanige ruimte toch één en slechts één bijzondere manier bestaat om een richting door een punt naar een ander punt te verplaatsen, vormt den inhoud van de nieuwe ontdekking. Nu is het hoogst merkwaardig, dat dat verplaatsingsvoorschrift of „pseudoparallelisme" lang van te voren ontdekt had **kunnen** worden. De onderzoekingen toch van Christoffel, Lipschitz, Ricci en vele anderen hadden alles voorbereid en men had de pseudoparallele verplaatsing bijv. onmiddellijk kunnen verkrijgen door den „covarianten differentiaal" van Ricci gelijk nul te stellen. Maar het is nu eenmaal een feit, dat de ontdekking **niet** gedaan werd, voor en aleer van de ervaringswetenschappen uit via de algemeene relativiteitstheorie de stoot werd gegeven. In de twee verhandelingen, die onafhankelijk van elkaar het pseudoparallelisme introduceerden, een Italiaansche [4]) en een Nederlandsche [5]), gaan dan ook beide auteurs reeds in den eersten zin van het eerste hoofdstuk van de relativiteitstheorie uit.

Hoewel de toepassing van het pseudoparallelisme onmiddellijk leidde tot de ontdekking van een nieuw relativistisch effect in de praecessiebeweging van de aarde, ligt de beteekenis van het nieuwe beginsel niet zoozeer in zijn onmiddellijke toepasselijkheid op de ruimtetijdwereld. Veeleer moet deze gezien worden in de talrijke uitbreidingen, die de geometers het onmiddellijk, en nu weer geheel **onafhandelijk** van iedere ervaring, hebben doen ondergaan. Het pseudoparallelisme werd direct veralgemeend tot de zoogenaamde theorie der overbrengingen, waarbij een soort van meetkunde tot stand komt door een voorschrift hoe men naburige lokale ruimten (eventueel te denken als oneindig kleine omgevingen) op elkaar heeft af te beelden. Zulke afbeeldingen, als transformaties opgevat, behooren tot de een of andere **cindige** Liesche transformatiegroep, en zoo komen we dus weer tot een indeeling van meetkunden naar de ten grondslag gelegde **eindige** Liesche groep, maar in een geheel anderen zin als de indeeling van Klein. De meetkunden van Klein hebben, om het eens zoo te zeggen, de transformatiegroep van binnen in de ruimte zelf, de nieuwe overbrengingsmeetkunden hebben haar van buiten in de betrekkingen tusschen de lokale ruimten. Bij iedere Kleinsche meetkunde behoort een overbrengingsmeetkunde, die zich tot de eerste verhoudt als de meetkunde der gekromde Riemannsche ruimte tot die der vlakke euklidische ruimte en op deze wijze kan men dus een „gekromde" projectieve meetkunde, een „gekromde" conforme meetkunde, enz. ontwikkelen. Maar ook daarmede was het laatste woord nog niet gesproken en er ontstonden nog tal van andere uitbreidingen, waarover ik hier echter niet wil uitweiden.

Intusschen lag het voor de hand, dat de draad, die na de erkenning van de Riemannsche meetkunde als meetkunde van een geometrisch object bij een **oneindige** Liesche groep was afgebroken, nu weer zou worden opgevat. Dat geschiedde dan ook reeds in 1922 door Eisenhart en Veblen [6]). Spoedig bleek, dat, zooals te vermoeden was, alle overbrengingsmeetkunden ook als objectmeetkunden op te vatten waren, maar ook, dat het omgekeerde niet het geval was. Weliswaar gelukte het, de meest interessante objectmeetkunden als overbrengingsmeetkunden te formuleeren, maar dat nam niet weg, dat het begrip objectmeetkunde tenslotte toch ruimer was. Dat bracht de vraag opnieuw op den voorgrond, wat nu eigenlijk meetkunde is. Men moet daarbij bedenken, dat door de geweldige uitbreiding, die de meetkunde ondergaan had, eerst door de overbrengingstheorie en onmiddellijk daarop door de objecttheorie, enorme gebieden van de wiskunde, die oorspronkelijk tot de analyse gerekend werden, zoo maar zonder meer tot de legitieme jachtvelden der geometers geworden waren. Een nauwkeurige analyse van de begrippen geometrisch object en geometrische figuur in 1935 [7]) leidde dan ook eenerzijds tot de bevestiging van de schijnbaar vage en toch zoo juiste uitspraak van Veblen en Whitehead in 1932 [8]):

,,.... een deel van de wiskunde wordt meetkunde genoemd, omdat deze naam aan een voldoend aantal competente menschen op gronden van emotie en traditie juist voorkomt,"

anderzijds echter ook tot een nadere preciseering van het in deze uitspraak zoo gelukkig geïntroduceerde **emotioneele** element. Dat emotioneele element is inderdaad, meer dan het traditioneele, de spil waarom alles draait. Dat leidt er wel toe, dat de ,,competente" menschen het er een enkelen keer niet over eens zijn of iets wel meetkunde is of niet. Zoo zagen Eisenhart en Veblen de objecttheorie als de ,,natuurlijke" opvatting, terwijl Cartan op het internationale congres te Oslo in 1936 [9]) juist als zijn meening te kennen gaf, dat deze theorie, bijv. toegepast op de Riemannsche meetkunde, ,,masque complétement, ce qu'il y a en elle de géométrique, au sens intuitiv du mot", een uitspraak, die dan overigens weer getemperd werd door de opmerking, dat er ook wel weer gevallen zijn, waar de objecttheorie tot vraagstellingen voert, die toch zonder eenigen twijfel geometrisch moeten worden genoemd. Maar wat nood? Wat doet het er eigenlijk toe of een onderzoek ,,meetkundig" of ,,analytisch" genoemd wordt, waar het toch alleen maar wezenlijk is, dat het probleem belangrijk en de behandeling goed is. En juist in die waardeering der problemen, in de onderscheiding van dat, wat op zeker oogenblik **wel**, en dat, wat **niet** of **nog niet** belangrijk is, speelt het emotioneele element **de** groote rol.

Het is toch inderdaad niet zoo, dat de mathematicus na opstelling van een indeelingsbeginsel, hetzij dat van Klein, hetzij dat der overbrengingstheorie, hetzij dat der objecttheorie, zich nu doodkoud aan het werk zet om achtereenvolgens eens alle door zoo'n indeeling aangegeven mogelijkheden te gaan uitwerken. Reeds de oneindigheid der binnen het kader van ieder dier indeelingen denkbare gevallen zou zulk een program onmogelijk maken, nog afgezien van het feit, dat een mathematicus geen rekenmachine, maar een mensch is, een mensch met bepaalde neigingen, staande in de maatschappij in zeker tijdsgewricht en beïnvloed door en geïnteresseerd in de groote vragen, die in dat tijdsgewricht in de verschillende andere wetenschappen rijzen. Een indeeling, welke dan ook, levert hem slechts voorgeordend materiaal, dat hij als vrij scheppend kunstenaar ter bevrediging van een in hem levende, voornamelijk aesthetische, behoefte bewerkt, daarbij zijn onderwerpen kiezend, weliswaar naar eigen smaak en eigen aanleg, maar bovenal sterk beïnvloed door de vragen van zijn tijd op physisch, technisch of ook wel economisch gebied. Hier komt in de wiskunde zelf duidelijk het boven ieder structuurschema uitgaande element aan den dag: de eigen belangstelling, de eigen wil, het eigen kunnen van den onderzoeker bepaalt de richting van voortgang. Een formalistische schema-peuteraar is misschien een bekwaam rekenaar, maar nooit een scheppend mathematicus. De groote invloed van het emotioneele element verklaart met één slag waarom geen deel der wiskunde op den duur gedijt zonder den vernieuwenden en richtenden invloed der ervaringswetenschappen.

Van dien voortdurenden invloed der ervaringswetenschappen in den tijd na 1918, wil ik nu eerst enkele voorbeelden geven. Nooit is er een tijd geweest, waarin die invloed zoo groot was, physici en wiskundigen kloppen om zoo te zeggen dagelijks aan elkaars deur. Reeds onmiddellijk na invoering der algemeene relativiteitstheorie ontstonden er tal van vragen, waarvan ik er hier slechts enkele, die van speciaal belang voor de meetkunde zijn, noem. In de eerste plaats werd er gevraagd naar een algemeene veldtheorie, die de theorie van het gravitatieveld en van het electromagnetische veld tot één geheel vermocht te vereenigen, zooals de relativiteitstheorie dat al gedaan had voor het electrische en het magnetische veld. Herinneren we aan het feit, dat die laatste vereeniging gelukt was door den overgang van onze gewone meetkunde in drie afmetingen tot de meetkunde der Lorentzgroep in vier afmetingen, dan wordt het duidelijk, dat er nu eigenlijk weer een nieuwe meetkunde, een generaliseering van de Riemannsche. gevraagd werd. Met de thans ter beschikking staande machtige meetkundige hulpmiddelen kon aan die vraag gemakkelijk worden voldaan; al te gemakkelijk, want er ontstond een stortvloed van meetkunden, die alle de gewenschte unificeering gaven. Daarbij kwam het merkwaardige feit aan het licht, dat bij alle meetkunden, die zich konden handhaven, de vijfdimensionale van Th. von

Kaluza (1921) [10]), die van A. Einstein en W. Mayer (1931) [11]), de projectieve van O. Veblen en B. Hoffmann (1931) [12]), de homogene projectieve van Delftsche onderzoekers (1932) [13]), de anholonome van G. Vranceanu (1935) [14]) en ten slotte de vijfdimensionale van A. Einstein en P. Bergmann (1938) [15]), het getal 5 op de een of andere manier, hetzij als dimensiegetal, hetzij als aantal der coördinaten in de algemeene of in de lokale ruimte een rol speelt. Welke dier meetkunden òf als de meest juiste òf als de meest elegante formuleering der ervaringsfeiten den strijd zal winnen, is voorloopig niet uit te maken, maar het is wel zeer waarschijnlijk, dat het getal 5 een zeer bijzondere beteekenis zal blijven bewaren, òf als zoodanig, òf ook als noodzakelijke overgangstrap tot een misschien nog belangrijker getal, namelijk 6. De onderzoekingen over de fijnstructuur der spectraallijnen, die tot de quantenmechanica behooren, hadden namelijk intusschen weer tot een nieuwen vorm van meetkunde gevoerd, de meetkunde van de spinruimte. Die spinruimte is niets mystieks en vooral niet een ruimte, die zich buiten en naast onze driedimensionale ruimtetijdwereld zou bevinden. Beschouwt men namelijk in die laatste ruimte de figuur, die men in drie dimensies een bol met straal 1 zou noemen, dan liggen er op dien „hyperbol" ∞^3 rechte lijnen en op elk van die lijnen liggen ∞^1 vectoren. De spinruimte is nu niets anders als de verzameling van deze ∞^4 vectoren als vierdimensionale uitgebreidheid opgevat.*) De noodzakelijkheid van het werken met de spinruimte beteekent dus slechts, dat de juiste beschrijving van de werkelijk waargenomen spectraallijnen niet mogelijk is, wanneer men alleen maar van de gewone scalairen, vectoren, enz. van de ruimtetijdwereld gebruik maakt, maar dat men eerst de meetkunde met deze eigenaardige vectoren op dien hyperbol moet verrijken. Nu bleek merkwaardigerwijze, dat de spintheorie niet alleen den overgang tot het getal vijf verdraagt, maar wat meer is, er zeer bepaaldelijk om vraagt, en zelfs met die 5 nog niet geheel tevreden is daar zij zich op de elegantste wijze laat formuleeren onder tengrondslaglegging van het getal 6. Een oud onderzoek van Cunningham en Bateman in 1910 [16]) kwam nu ook in een geheel ander licht. Deze auteurs hadden er namelijk de aandacht op gevestigd, dat de Maxwellsche vergelijkingen niet alleen invariant zijn bij de Lorentzgroep, maar ook nog bij een andere groep, de zoogenaamde conforme groep, een resultaat overigens, waarvan men de consequenties tot heden nog niet ten volle heeft kunnen overzien. De conforme groep is echter

*) Elke vector correspondeert daarbij met 2 punten van de spinruimte en is dus dubbel te tellen.

een eindige Liesche groep, die zich op de meest natuurlijke wijze laat behandelen met 6 coördinaten.

Tot zoover hebben wij dus, ook na 1918, een sterken invloed van de ervaringswetenschapen op de meetkunde kunnen constateeren, maar een invloed van betrekkelijk tam karakter, er ontstonden wel tal van nieuwe meetkunden, maar dat waren toch altijd nog overbrengingsmeetkunden, die in het nu bestaande moderne schema pasten. De ervaring werkte hier richtend en stimuleerend maar nog niet revolutionair. Revolutionair werd die invloed eerst, toen het meest centrale probleem van het huidig natuurwetenschapelijk onderzoek, het probleem der materie, opnieuw aan de orde gesteld werd. In alle veldtheoriën treedt de materie (in den ruimsten zin: electronen, protonen, photonen, enz.) in eersten aanleg als een vreemd element op. Blijven we als voorbeeld bij het electron, dan kan men òf dit deeltje eindige afmetingen geven en trachten het te beschouwen als een stuk van het veld, een stuk, waar dat veld erg sterk of erg buitengewoon is, òf men kan het deeltje als exact puntvormig en als „singulariteit" van het veld opvatten. Beide methoden hebben moeilijkheden en deze treden zoowel bij de klassiekmechanische als bij de quantenmechanische behandeling op. Populair zou men zich die moeilijkheden als volgt kunnen voorstellen. Blijft men bij eindige afmetingen, en wil men dus de materie uit het veld afleiden, dan zouden de geweldige krachten, die noodig zijn om de negatieve electrische lading op te hoopen, uit het veld verklaard moeten worden en dat gaat niet, tenzij men met H. Born de Maxwellsche vergelijkingen in het gebied binnen het electron voor ongeldig verklaart. Anderzijds voert de puntvormige concentratie tot oneindige waarden voor de eigen-energie. W. Pauli toonde in 1933 aan, dat de moeilijkheid bij het electron eigenlijk zit in de moeilijkheid de eigen-energie eindig te houden en tegelijkertijd in overeenstemming te blijven met de relativistische invariantie-eischen.[17]) De omstandigheid, dat de oneindige eigen-energie ook optreedt bij het gravitatieveld van een lichtquant, hoewel men hier toch geen concentratie in een punt heeft ingevoerd, leidde hem tot de conclusie, dat niet alleen het veldbegrip **maar ook het ruimtetijdbegrip in het kleine een principieele verandering zal moeten ondergaan.** [18]) Ook bij de berekening van de nulpuntsenergie der zwarte straling en bij die van de potentiaal der combinatie neutron-proton treden oneindige waarden op. Augustus 1938 zegt P. A. M. Dirac [19]) in een onderzoek over de straling van het bewegende electron, dat het binnenste van een electron niet zoo zeer een gebied is waar de veldvergelijkingen mis loopen, maar veeleer een, **waar de elementaire eigenschappen van ruimte en tijd hun geldigheid verliezen.** Ziedaar de revolutionnaire inslag van de zijde der ervaring, die zich sindsdien bij allerlei auteurs herhaalt. *) Het gewone ruimte-tijd-continuum is blijkbaar als beschrijvingsraam in het kleine niet te gebruiken en men wil dus eenvoudigweg, weliswaar niet met de meetkunde, maar dan toch met de tot nu beschouwde vormen van meetkunde, in het kleine breken. En deze revolutionaire denkbeelden komen niet uit de hoofden van al te theoretische en van de werkelijkheid vervreemde mathematici, maar uit de praktijk der ervaringswetenschappen zelf! Het is de verruimde ervaring, die opnieuw de mathematici tot verruiming hunner begrippen **dwingt.**

Als eersten van de onderzoekers op dit terrein noem ik H. T. Flint [20]) en Yositaka Mimura [21]), die in 1935 onafhankelijk van elkaar op het denkbeeld kwamen de metriek in het kleine te vervangen door een zeer vreemde metriek, die samengesteld is met behulp van de matrices die Dirac in de theorie van de spin invoerde. Het lijnelement is geen lengte meer, maar een matrix, d.i. een operator van de soort, zooals men die in de quantenmechanica aantreft. Voor het overige blijven deze onderzoekers en hunne medewerkers nog vasthouden aan de gewone overbrengingsmeetkunde en speelt zich alles nog af in het gewone ruimte-tijd-continuum.

De bijdragen die A. March heeft geleverd, dateeren vanaf 1936. Uitgaande van het denkbeeld van de principieele onmogelijkheid afstanden te meten kleiner dan een zekere lengte γ, heeft hij zijn verdere onderstellingen herhaaldelijk herzien en getuigt vooral zijn laatste samenvattende verhandeling van October 1938 [22]) van zelfkritiek en prijzenswaardige voorzichtigheid. γ is bij hem een principeel voor exacte meting in aanmerking komende natuurconstante. In plaats van de in de golfmechanica optredende oneigenlijke Diracsche functie δ, die overal nul is behalve in één punt, en in dat ééne singuliere punt oneindig, voert hij een nieuwe functie D in, die nergens meer oneindig wordt, maar nog veel oneigenlijker is dan de Diracsche functie, omdat zij in de buurt van het singuliere punt volstrekt niet mag worden vastgelegd (dat

*) Men vergelijke de gedetailleerde uiteenzetting van W. Heisenberg in: Die Grenzen der Anwendbarkeit der bisherigen Quantentheorie, Zeitschr. f. Physik 110 (1938) 251—266.

verbiedt de relativistische invariantie) en men alleen maar weet, dat zij heeft te voldoen aan de eigenschap, dat de integraal over een voldoend groot gebied om het singuliere punt heen, gelijk 1 is. Daarmee gaat March veel verder dan Flint en Mimura, hij verbiedt niet alleen een metriek in het kleine, hij laat daar ook geen „matrixlengte" meer toe, en hij verbiedt zelfs het vastleggen van een functie in het kleine, welke dan ook, omdat, zooals hij uitdrukkelijk verklaart, de afzonderlijke punten van een voldoend klein gebied hun onderscheidbaarheid verloren hebben. Dit is een zeer belangrijke stap, want hij laat daarmede eigenlijk het ruimte-tijd-continuum met zijne althans principieel onderscheidbare punten los. De Marchsche functie is dan ook eigenlijk geen puntfunctie, d.i. een toevoeging van getalwaarden tot de punten van een ruimte, maar een verzamelingsfunctie, d.i. een toevoeging van getalwaarden tot de elementen van een elementverzameling, die zoodanig is geconstrueerd, dat met ieder niet te klein ruimtelijk gebied een element correspondeert. Maar daarmede zijn wij al boven March uit en bij ideeën aangeland, die tot het terrein behooren van een anderen onderzoeker, D. van Dantzig.

In het werk van van Dantzig met betrekking tot dit probleem (vanaf 1934) [23] zijn drie verschillende stadia te onderscheiden. In het eerste stadium toonde hij aan, dat een veel grooter deel van de physica, dan men vroeger vermoed had, geformuleerd kan worden zonder gebruik te maken van metrische begrippen (d.i. dus van lengten en hoeken). Dit programma werd door hem reeds uitgevoerd voor de klassiekrelativistische puntmechanica en electrodynamica, voor de quantenelectrodynamica van het vacuum en voor de klassiekrelativistische thermodynamica. Metrische begrippen bleken eigenlijk alleen wezenlijk te zijn voor de betrekkingen tusschen impuls en snelheid en tusschen potentiaal en stroom en het gelukte hem aan te toonen, dat ook deze betrekkingen kunnen worden opgevat als niet noodzakelijke specializeeringen van algemeenere niet-metrische integraalbetrekkingen. De omstandigheid, dat hier juist integraalbetrekkingen optreden inplaats van differentiaalbetrekkingen, voerde hem dan vanzelf tot het tweede stadium, waarin er principieel van afgezien wordt een physische grootheid als functie van een geometrisch punt te bepalen, en alleen nog een bepaling ten opzichte van kleine gebieden die tenminste één partikel bevatten, wordt toegelaten. Deze gebieden kunnen niet meer tot in het oneindige worden onderverdeeld en voeren dus niet meer als vanouds door een limietovergang tot een geometrisch punt. Maar de geometrische punten worden nog niet geheel geëcarteerd, daar elk gebied werkelijk nog als puntverzameling wordt opgevat. De beschouwde functies zijn echter van puntfuncties tot verzamelingsfuncties geworden, d.w.z. functies, die niet meer voor elk punt maar alleen voor elke voorkomende verzameling (d.i. gebied) gedefinieerd zijn. In betrekkingen, waarin de tijd of gerichte grootheden optreden, voert deze opvatting tot de flitsenhypothese, die een einde maakt aan de continue materieverdeeling ook in de tijd-richting. Gepubliceerd zijn tot nu alleen de gronddenkbeelden en de wijze waarop de theorie der Stieltjes-Lebesgue-integralen moet worden toegepast. In het derde stadium wordt het geometrische punt en daarmede het ruimte-tijd-continuum in het kleine geheel geëlimineerd. De onderstelling, dat de „gebieden" met betrekking tot welke de functies gedefinieerd zijn, verzamelingen van punten in een ruimte-tijd-continuum zijn, wordt losgelaten, terwijl bovendien de waarden, die de functie kan aannemen, niet meer noodzakelijk getallen zijn, maar daarnaast ook getallenverzamelingen mogen worden toegelaten. Dit derde en belangrijkste stadium is nog in zijn eerste fase van ontwikkeling; behalve uit gehouden voordrachten put ik hier slechts uit mondeling verstrekte gegevens. De nu geëmancipeerde „gebieden" voeren, wanneer zij zelf weer als „punten" van een „ruimte" worden opgevat, tot een soort van ∞-dimensionale „ruimte". Eigenlijk is dat woord „ruimte" hier in zeer algemeenen zin op te vatten, daar men te doen heeft met een zeer abstracte verzameling van elementen. Er zijn „punten" van die „ruimte" (de elementen), die met gebieden van het ruimte-tijd-continuum correspondeeren, maar er zijn ook gebieden, die niet meer met een „punt" correspondeeren, terwijl het niet uitgesloten is, dat men ook „punten" zal beschouwen die niet meer met een gebied correspondeeren.

Tenslotte nog iets over het allerlaatste werk van M. Born (April en Juni 1938) [24]. Hij gaat uit van de dualiteit tusschen plaats-tijd en impuls-energie en de onnauwkeurigheidsrelaties van Heisenberg, die tot uitdrukking brengen, dat de fout, die men noodzakelijk bij het bepalen van plaats en tijd maakt, kleiner is, naarmate de fout bij de gelijktijdige bepaling van impuls en energie grooter is, en omgekeerd. Bij afgesloten kleine systemen, zooals electronen, protonen, kernen, e.d., wordt de bepaling van een plaatsverschil zeer onnauwkeurig, de bepaling van een energieverschil daarentegen, aan de hand der spectraallijnen, zeer nauwkeurig. Dit voert hem er toe, de metriek voor lengte en tijd in het extreme geval van zeer kleine gebieden geheel los te laten en instede daarvan een metriek voor impuls en energie in te voeren, die van de gewone lengte-tijd-metriek volkomen onafhankelijk is. In het groote blijft een Riemannsche metriek gelden, die bij bepaalde, door vele astronomen gemaakte onderstellingen over de kromming der ruimte, voert tot een gesloten gekromde driedimensionale ruimte, dat is dus een ruimte, waarin een langste afstand bestaat. Op dezelfde wijze kan men voor impuls en energie van een klein energetisch afgesloten systeem een metriek invoeren, die tot een gesloten impuls-energie-ruimte leidt, waarin eveneens een langste „afstand" bestaat, welke „afstand" hier natuurlijk een maximaal energieverschil beteekent. Dat zich hier een weg opent om van de oneindige energieën af te komen, is duidelijk. Maar met dat al is dit nog maar een begin van een theorie. Alleen de twee grensgevallen: groote afstanden, met vervaging der impuls-energie-metriek, en kleine afstanden, met vervaging der ruimte-tijd-metriek, zijn belicht, en er is nog geen algemeene theorie, die voor gemiddelde afstanden geldt en bij specialisatie juist tot die grensgevallen voert. Daar de punten van een klein gebied ook bij Born hun beteekenis verliezen, zal verdere uitwerking (misschien van wege de dualiteit via de theorie der contacttransformaties) wel voeren tot een soort van ∞-dimensionale „ruimte" als te voren geschetst.

Het is dan de meetkunde van die eigenaardige ∞-dimensionale „ruimte" waarnaar eigenlijk gezocht wordt. Het is in die „ruimte", dat zich de golffuncties der toekomstige quantenmechanica zullen moeten ontplooien, iets wat op zichzelf niet behoeft te bevreemden, daar golffuncties in meerdimensionale en ∞-dimensionale ruimten reeds nu in de golfmechanica voortdurend aan de orde zijn. Maar dit alles is toekomstmuziek, er heeft zich, zelfs bij de meest voortgeschreden onderzoekers, nog niets blijvends kunnen uitkristalliseeren. Misschien zullen nieuwe ervaringen uit de kernphysica den stoot moeten geven, misschien komt de nieuwe verlossende gedachte uit een geheel anderen hoek. In elk geval staat er iets zeer buitengewoons te wachten, een nieuwe meetkunde, niet geboren uit abstracte bespiegelingen alleen, maar als structuurschema der werkelijkheid geboren in en uit den theoretischen en practischen strijd om de beheersching der natuurverschijnselen.

In bewuste afwijking van veelal gebruikelijke methoden, heb ik deze rede niet gecomponeerd op het tevreden grondmotief

„und wie wir 's dann zuletzt so herrlich weit gebracht" maar heb ik U integendeel gevoerd tot in de werkplaats zelve, de plaats van strijd en teleurstelling, de plaats waar wij vele malen moeten zeggen: „ik weet niet" tegen een enkele maal „ik meen iets te weten". En ik heb niet geaarzeld U daarbij de meest wonderlijke en abstracte structuren voor oogen te voeren, structuren waarvan zeker velen van U alleen de wonderlijkheid zullen onthouden. En toch heb ik het meest wonderlijke tot het laatst bewaard, de bewering namelijk, dat dit alles, tegen allen schijn in, van de meest practische beteekenis is.

Al dat, wat men met het woord moderne cultuur pleegt aan te duiden, berust toch, wat de technische zijde betreft, op de mogelijkheid energie te winnen en deze energie om te zetten in voor den mensch bruikbare vormen. Men kan zich natuurlijk de vraag stellen, en die vraag is ook meermalen gesteld, of de moderne techniek de menschheid nu eigenlijk gelukkiger maakt, maar het is niet waarschijnlijk, dat overwegingen van deze soort, zelfs al mochten zij juist zijn, de menschen er toe zullen brengen de wijzers van de klok terug te draaien en vrijwillig terug te gaan tot het leven onzer verre voorouders, dat wij ook niet al te zeer moeten idealizeeren. De vraag is dus gewettigd, of de weg, dien wij thans gaan, in werkelijkheid wel ergens heen leidt, m.a.w., of het op den duur mogelijk zal blijken voldoende energie te winnen om op dezen ingeslagen weg voort te gaan.

Volgens gegevens, ontleend aan de verslagen der wereld-krachtconferentie in 1929 [25]), bedroeg de totale over de geheele wereld in 1925 verbruikte hoeveelheid kool, olie en water, op kool omgerekend, 1,6 milliard ton, waarvan 0,74 milliard ton in de Vereenigde Staten en 0,65 milliard ton in Europa. De beschikbare wereldvoorraad aan kolen en olie bedraagt naar een eveneens in deze verslagen te vinden schatting, op kool omgerekend, 5,6 billioen ton en daarnaast staat nog een totale beschikbare waterkracht, die, bij volledig gebruik, per jaar een hoeveelheid energie zou kunnen leveren gelijkstaande met 2 milliard ton kool. De op de wereld aanwezige waterkracht is niet zeer groot en zou volkomen onvoldoende zijn om de energiebehoefte van Europa alleen te dekken, indien in Europa het energieverbruik per hoofd van de bevolking zou stijgen tot de in 1925 in de Vereenigde Staten bereikte hoogte, en dienovereenkomstig een cijfer van 3,68 milliard ton kool zou bereiken. Laten wij de waterkracht buiten beschouwing, dan staan tegenover elkaar een totale voorraad van 5,6 billioen ton en een jaarverbruik van 1,47 milliard ton in 1925. Bij gelijkblijvend verbruik resulteert daaruit een duur van 3800 jaar, een schijnbaar geruststellend cijfer. Neemt echter het verbruik per jaar met slechts ½ % toe, dan wordt die duur gereduceerd tot 600 jaar *), terwijl een toename met 1 % per jaar tot de eenigszins ontstellende uitkomst van 370 jaar voert. Nu wil het mij voorkomen, dat, gezien de duur der ontwikkeling van den mensch op aarde, die zeker wel niet op minder dan 200 000 jaren geschat moet worden, een cijfer van 3800 jaar van een algemeen standpunt bezien al even ontstellend is, en dat wij zouden moeten constateeren met onzen geheelen technischen vooruitgang in een betrekkelijk kort doodloopend slop geraakt te zijn, waarin wij eigenlijk niets anders doen dan energetisch ver boven onzen stand leven. Zelfs al maken wij gebruik van ruimere schattingen van de hoeveelheid steenkool, zooals die van Lippincott (1930), die bij aanname van ontginningsmogelijkheid tot 2000 Meter diepte komt tot 7,4 billioen ton, of ook van de meest fantastische van van Heys (1924), die komt tot 10,8 billioen ton, dan vinden wij bij gelijkblijvend verbruik 5000 jaren resp. 7400 jaren en bij een jaarlijksche toename van het verbruik met ½ % slechts 650 resp. 725 jaren, in elk geval dus slechts uitstel van een onvermijdelijke executie. Tenzij er natuurlijk eenig uitzicht bestond op het exploiteeren van andere energiebronnen, die ons van kool en olie onafhankelijk zouden maken.

Men is geneigd het eerst aan de zon te denken, wier stralen dagelijks enorme energiebedragen aan de aarde toevoeren, echter in een vorm, die, voorloopig althans, allerminst geschikt schijnt te zijn voor technische exploitatie. Wel geven de biologen ons hoop, dat het eenmaal zal gelukken stralingsenergie in een bruikbaren vorm over te voeren door middel van biologische processen, maar voorloopig zijn er nog geen zichtbare resultaten, en kennen wij practisch alleen het zeer langzame biologische proces, dat onafzienbare geologische tijdperken noodig gehad heeft om de steenkool te vormen, die wij nu bezig zijn in enkele eeuwen te verbruiken. De relativiteitstheorie bracht echter nog een andere energiebron aan het licht, de materie zelf, die, zooals theoretische

*) Na die 600 jaar zou het jaarlijks verbruik gestegen zijn tot 29 milliard ton, voldoende voor een verbruik per hoofd van de geheele bevolking der aarde van nog niet 2½ maal het verbruik per hoofd in de Vereenigde Staten in 1925. Een toename met ½ % per jaar leidt dus volstrekt nog niet tot fantastische cijfers voor het verbruik per hoofd.

overwegingen leerden, niets anders is dan een vorm van opgehoopte energie. Men berekent gemakkelijk, dat 64 Liter water gelijk staat met een energie van 1,6 billioen Kilowattuur, of omgerekend in kool (op een basis van 1 Kilowattuur = 1 K.G. kool) met 1,6 milliard ton kool, dat is juist de totale in kool omgerekende energieproductie over de geheele wereld in 1925. Daarbij is ondersteld, dat de geheele materie in nuttige energie omgezet wordt. Maar zelfs al gelukte het maar 100 K.G. en 7 ons waterstof om te zetten in 100 K.G. helium, bij welk proces 7 ons materie in vrije energie overgaat, dan zou de gewonnen energie van 1¾ milliard KWU, berekend tegen 1 cent per KWU, een bedrag vertegenwoordigen van 175 millioen gulden. Indien dergelijke metachemische processen, die thans reeds in de laboratoria op zeer kleine schaal worden gerealiseerd, en waarschijnlijk op zeer groote schaal optreden bij het opvlammen van een nova, op technische schaal en met een bruikbaar rendement mogelijk zouden worden, zou de zich verder ontwikkelende techniek niet alleen onafhankelijk gemaakt worden van de met zekerheid vroeger of later dreigende uitputting der kolenvelden, maar de menschheid zou bovendien de beschikking krijgen over practisch ongelimiteerde hoeveelheden energie.

Het is dus van het grootste belang er achter te komen of er een mogelijkheid tot practisch bruikbare metachemische energiewinning bestaat, of dat er de een of andere natuurwet is, die deze mogelijkheid uitsluit of zoover beperkt, dat er voor werkelijk practisch gebruik geen uitzichten bestaan. Men denke hier bijvoorbeeld aan de eerste hoofdwet der thermodynamica, die het perpetuum mobile uitsluit, en aan de tweede wet, die de exploitatie van de enorme in het zeewater aanwezige warmte naar het rijk der schoone droomen verwijst. Kenden wij slechts de natuurwetten, die het gedrag der kleinste materiedeeltjes beheerschen, anders gezegd het **structuurschema der metachemie** of de **meetkunde in het kleine,** dan zouden wij in staat zijn een prognose uit te spreken ten aanzien van het verdere verloop van de technische periode der geschiedenis, de periode waarin wij thans verkeeren. Maar om dit structuurschema te leeren kennen zal er nog veel onderzoek noodig zijn, practisch onderzoek in de laboratoria en theoretisch onderzoek van de mathematische physici en de mathematici over de geheele wereld. Van het aandeel der wiskunde in dat onderzoek heb ik getracht het een en ander, zij het ook kort en vaag, aan te duiden. Mocht ik bij U de overtuiging gevestigd hebben dat het vele, dat tot nu bereikt is, betrekkelijk nog zeer weinig is en dat ons wellicht reeds binnenkort nieuwe resultaten van groote theoretische en practische beteekenis te wachten staan, dan is mijn doel voor heden bereikt.

Ik heb gezegd.

LITTERATUUR.

[1]) F. Klein. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlanger Antrittsprogramm 1872; Ges. Werke I. 460—497.

[2]) Ges. Werke I, blz. 487.

[3]) Das Relativitätsprinzip, Ann. der Phys. (4) 47 (1915) 927 e.v., Jahresber. d. D.M. 24 (1915) 372 e.v.

[4]) T. Levi Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque etc., Rend. Circ. Mat. Palermo 42 (1917) 173—205.

[5]) J. A. Schouten, Die direkte Analysis zur neueren Relativitätstheorie, Verh. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam Bd. 12, No. 6, 95 blz.

[6]) L. P. Eisenhart and O. Veblen, The Riemann geometry and its generalisation; Proc. Nat. Acad. of Sc. U.S.A. 8 (1922) 19—23.

[7]) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Was ist Geometrie? Abh. aus dem Seminar für Vektor- und Tensoranalysis, Moskau, 2 (1935) 15—48.

[8]) O. Veblen and J. H. C. Whitehead, The foundation of differential geometry, Cambr. Tracts No. 29, 1932.

[9]) E. Cartan, Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne, Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens, Oslo 1936, I 92—103.

[10]) Th. von Kaluza, Zum Unitätsproblem des Physik, Sitz der Preuss. Ak. der Wiss. 54 (1921) 966—972.

[11]) A. Einstein und W. Mayer, Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität, Sitz. der Preuss. Ak. der Wiss. 25 (1931) 541—557; 26 (1932) 130—137.

[12]) O. Veblen and B. Hoffmann, Projective relativity, Phys. Rev. 36 (1931) 810—822.

[13]) J. A. Schouten und D. van Dantzig, Ueber eine vierdimensionale Deutung der neuesten Feldtheorie, Proc. Kon. Ak. v. Wet. 24 (1931) 1398—1407; Zum Unifizieringsproblem der Physik. Skizze einer generellen Feldtheorie, aldaar 25 (1932) 642—655; Generelle Feldtheorie, Zeitschr. für Physik, 78 (1932) 639—667; On projective connexions and their applications to the general field-theory, Annals of Math. 34 (1933) 271—312. J. A. Schouten, La théorie projective de la relativité, Ann. de l'Inst. H. Poincaré 5 (1935) 51—88 (samenvatting). J. A. Schouten und J. Haantjes, Generelle Feldtheorie VIII, Zeitschr. f. Phys. 89 (1934) 357—369. Verg. W. Pauli, Über die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten, Ann. der Phys. 5, 18 (1933) 305—336; 337—372.

[14]) G. Vranceanu, La théorie des champs et les hypersurfaces non holomes, C. R. 200 (1935) 2056; Sur une théorie unitaire non holonome des champs physiques, C. R. d. sc. de l'Acad. des sc. de Roumanie I (1936), Journal de physique et le radium 7 (1936) 514—526.
[15]) A. Einstein and P. Bergmann, On a generalization of Kaluza's theory of electricity, Ann. Math. Princeton 39 (1938) 683—701.
[16]) E. Cunningham, Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1910) 77—98. H. Bateman, aldaar 223—264, 469—488.
[17]) W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handb. d. Phys. XIV 2, 83—272, blz. 271.
[18]) L.c. blz. 272.
[19]) P. A. M. Dirac, Classical theory of radiating electrons, Proc. Roy. Soc. London 167 (1938) 148—169, blz. 160.
[20]) H. T. Flint, A relativistic basis of quantum theory III, Proc. Roy Soc. 150 (1935) 421—441; Ultimate measurements of space and time, Proc. Roy. Soc. 159 (1937) 45—56.
[21]) Y. Mimura, Relativistic quantum mechanics and wave geometry, Journ. of Sc. of the Hirosima Univ. 5 (1935) 99. In dit tijdschrift verschenen verder talrijke verhandelingen van Y. Mimura en zijne medewerkers over dit onderwerp.
[22]) Samenvattende verhandeling met litteratuuropgave: A. March, Die Idee einer atomistischen Struktur des Raumes, Die Naturwissenschaften 26 (1938) 649—656.
[23]) D. van Dantzig, Electromagnetism ,independent of metrical geometry, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 37 (1934) 521—526; 526—531; 644—652; 825—836; 39 (1936) 126—131; The fundamental equations of electromagnetism, independent of metrical geometry, Proc. Cambr. Phil. Soc. 30(1934) 421—427; Ricci-Calculus and Functional Analysis, Proc. Kon. Akad. v. Wet. 39 (1936) 785—794; Ueber das Verhältniss von Geometrie und Physik, Comptes Rendus du Congr. Int. des Math., Oslo 1936 II 225—227; Some possibilities of the future development of the notions of space and time, Erkenntnis 7 (1938) 142—146; Vragen en schijnvragen over ruimte en tijd, inaugureele rede Delft 1938.
[24]) M. Born, A suggestion for unifying quantum theory and relativity, Proc. Roy. Soc. 165 (1938) 291—203; Application of „reciprocity" to nuclei, Proc. Roy. Soc. 166 (1938) 552—557.
[25]) Power resources of the world (potential and developed), London, World Power Conference 1929.